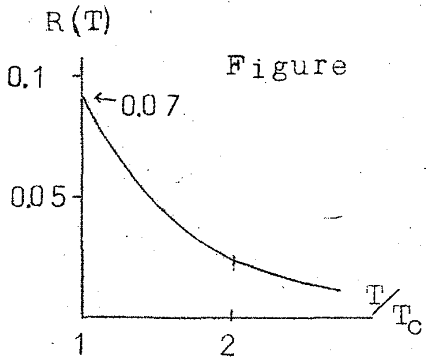
$$\omega_k = \frac{J(0,k)}{J(0)} \frac{4}{N} \sum_q n_q J(q) \quad (\equiv 2J(0,k)R(T))$$

$$\Gamma_k \simeq \frac{2^2 \cdot 3^2 [J(0,k)]^2}{R(T)\ J(0)} \cdot \left(\frac{kT}{J(0)}\right)^2 \quad , \quad \text{(虚部の最低次)}$$

温度依存性を調べる為に n_q にはグリーン関数の最低次で求めた関係式を用いた



Figure

Table

T/T_c	1.0	1.07	1.19	1.30
Γ_k/ω_k	~2	~3	~5	~10

従って Table から推察される範囲では，明確な peak としての Sloppy mode は観測しにくいことになる。

転移点近傍で現われる集団運動

森　　肇（九大理）

磁性体のスピン波，スピン拡散，流体の音波，熱伝導など所謂 hydrodynamic modes はキュリー点あるいは臨界点 T_c の近傍では，波数 k がスピン間あるいは粒子間 相関距離の逆数 より非常に小さいときに成立する。従って $\kappa \rightarrow 0$ となるキュリー点や臨界点の近傍ではそれらの集団運動は起り難くなる。つまり $T \rightarrow T_c$ につれて hydrodynamic regime は消失する筈である。このとき波数が $k \gtrsim \kappa$ を満すモードが重要となるわけだが，それらはどんな運動を行なうか？その運動はどう表現されるか，などを問題とする。

これらのモードは中性子散乱によって測定される波数領域であって，magnetite，MnF_2 等で観測されたと称せられる sloppy spin wave[1,2] はこのようなものであろう。液体 H_e I や液体アルゴンで観測された quasi－phonon[3,4] も，それらが local order によると考えられることからみて同じ系列の問題である。

この後の問題に対して，Pines はプラズモンや零音波と同様に collisionless regime での集団運動という考えを提案した。[3] この考えを筆者流に定式化することによって，後者だけでなく前者の問題も取扱える可能性があることを話した。その要点は次の通りである。

スピン系の集団励起をきめるにはスピン関数のフーリェ成分 $S_{\mathbf{k}}^{\alpha} = \Sigma_j S_j^{\alpha} \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j)$ の緩和関数，流体の密度の集団運動をきめるには粒子密度のフーリェ成分 $n_{\mathbf{k}} = \Sigma_j \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_j)$ の緩和関数をつくり，それらのラプラス変換の poles を求めればよい。量 A の緩和関数 $(A(t), A^*)$ のラプラス変換を連分数表示を使って

$$\Xi(z) \equiv \int_0^\infty dt\, e^{-zt} (A(t), A^*) / (A, A^*) \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$= \frac{1}{z+\lambda_0(z)} = \frac{1}{z + \dfrac{\Delta_1^2}{z+\lambda_1(z)}} \qquad \cdots\cdots (2)$$

とかく。[5] ただし簡単のため，振動数分布 $R_e \Xi(i\omega)$ の奇数次のモーメントは 0 とした。A(t) の random force を $\mathbf{f}_1(t)$，$\mathbf{f}_1(t)$ の random force を $\mathbf{f}_2(t)$ とすれば

$$\Delta_1^2 \equiv (f_1, f_1^*) / (A, A^*) = \langle \omega^2 \rangle \qquad \cdots\cdots (3)$$

$$\lambda_1(z) \equiv \Delta_2^2 \cdot \int_0^\infty dt\, e^{-zt} (f_2(t), f_2^*) / (f_2, f_2^*), \qquad \cdots\cdots (4)$$

$$\Delta_2^2 \equiv (f_2, f_2^*) / (f_1, f_1^*) = -\Delta_1^2 + \langle \omega^4 \rangle / \langle \omega^2 \rangle, \qquad \cdots\cdots (5)$$

$\langle\omega^2\rangle$, $\langle\omega^4\rangle$ は2次および4次のモーメントである。$\Xi(z)$ の poles は(2)から

$$z^2 + \lambda_1(z)\, z + \Delta_1^2 = 0, \qquad (6)$$

$$[\lambda_1(z)]^{-1} = [z + \lambda_2(z)] / \Delta_2^2 = 0, \qquad (7)$$

によってきまる。いま問題にしている運動は(6)の根から出てくるので，これを考えよう。因数分解すれば

$$z = -\frac{1}{2}\lambda_1(z) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_1^2 - 4\Delta_1^2}, \qquad (8)$$

この分散式の性質は $|\lambda_1|^2$ と $4\Delta_1^2$ との大小関係によって質的に異る。その各極限では，λ_1 の実数部を λ_1' として，

(A) $|\lambda_1'| \gg 2\Delta_1$ (hydrodynamic regime)

$$Z \cong - \Delta_1^2 / \lambda_1, \qquad (9)$$

(B) $|\lambda_1'| \ll 2\Delta_1$

$$Z \cong \pm\, i\Delta_1 \left[1 - \frac{\lambda_1^2}{8\Delta_1^2} \right] - \frac{\lambda_1}{2}, \qquad (10)$$

条件 **(A)** を満す例は，強磁性体の $S_{\mathbf{k}}^z$ や臨界気体のレーリー散乱の基準座標 $H_{\mathbf{k}} - h n_{\mathbf{k}}$，($H_{\mathbf{k}}$ ハミルトニアン密度，h エンタルピー) において波数kが κ および 1/(force range) より非常に小さいときである。そのとき(q)は spin diffusivity および thermal diffusivity を与え，T_c に近づくときこれらは異常に小さくなって所謂 critical slowing－down を惹きおこす。

(B) の場合は Δ_1 を振動数とし $\lambda_1/2$ を減衰常数とする集団振動を表わす。$|z|$ が大きくなると $\lambda_1(z)$ は小さくなり，$z = i\Delta_1$ を差しこんで得られる $\lambda_1(i\Delta_1)$ が条件 **(B)** を満せば実際にこのような集団振動が存在することに

なる。($f_2(t)$，f_2^*) の時間変化をガウス型で近似できるときには

$$\lambda_1(i\Delta_1) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\Delta_2^{\,2}}{\Delta_3}\,\exp\left[-\frac{\Delta_1^{\,2}}{2\Delta_3^{\,2}}\right], \qquad (11)$$

この(B)は Pines の collisionless regime の条件に対応する（ただし $\dot{A} = (i/\hbar)[\mathcal{H}, A]$ が非保存な量のときに限る)。$S_{\mathbf{k}}^z$ が $k \gtrsim \kappa$ のときこの条件を満せば sloppy spin wave が可能となる。実際強磁性体では比較的大きなkに対して，反強磁性体では比較的小さなkに対してこの条件が満されそうである。

物理的には次のように考えればよい。強磁性体では $k \ll \kappa$ のとき，反強磁性体では $|\mathbf{k}-\mathbf{K}| \ll \kappa$，（K逆格子ベクトルの半分）のとき(q)が異常に小さくなるが，これは $\Delta_1^{\,2}$ の分母（$S_{\mathbf{k}}^z, S_{\mathbf{k}}^{z*}$）が分子（$f_1, f_1^*$）より急速に大きくなるからである。[6] ところが反強磁性体のESRの線巾が $T \to T_c$ のとき逆に異常に大きくなることから推察できるように，[7] 反強磁性体では $k < \kappa$ ののとき，強磁性体では $k >$ 　のとき，(f_1, f_1^*) が ($S_{\mathbf{k}}^z, S_{\mathbf{k}}^{z*}$) より速く大きくなり $\Delta_1^{\,2}$ が逆に大きくなる筈である。このようにして T_c の近くでは条件(B)が満され sloppy spin wave が現われうると考えられる。このような機構からみれば sloppy spin wave は反強磁性体の方が観測され易いことになる。なお振動数 $\Delta_1 = \sqrt{\langle\omega^2\rangle}$ は Brout の conjecture[2] と一致する。しかし hydrodynamic modes のような鋭いモードは得られそうにない。

キュリー点以下の温度でスピンの横成分 $S_{\mathbf{k}}^{\pm}$ の運動を論ずるには上記を拡張せねばならない。(B) と同じ条件の下では

$$z \cong i\left[\left(\omega_0 + \frac{\nu_1 - \lambda_1''}{2}\right) \pm \Delta_1\sqrt{\eta}\right] - \frac{\lambda_1'}{2}\left[1 \pm \frac{\nu_1 - \lambda_1''}{2\Delta_1\sqrt{\eta}}\right], \qquad (12)$$

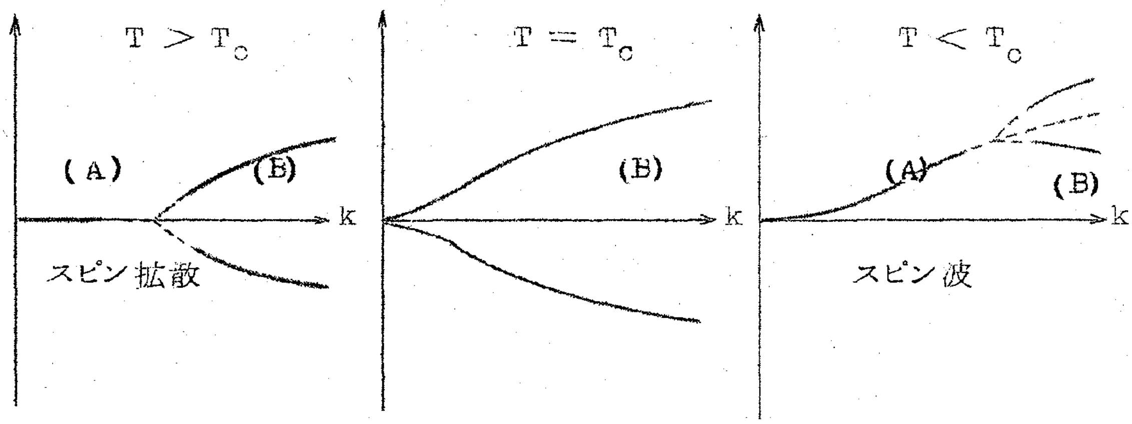
where

$$\omega_0 \equiv \langle\omega\rangle, \qquad \Delta_1^{\,2} \equiv \langle(\omega - \langle\omega\rangle)^2\rangle,$$

$$\nu_1 \equiv \langle(\omega-\langle\omega\rangle)^3\rangle/\Delta_1^{\ 2},$$

$$\eta \equiv 1+(\nu_1-\lambda_1'')^2/4\Delta_1^{\ 2},$$

キュリー点の上では奇数次のモーメントは消失し，(12) は (10) へ移行する。ω_0 は有限温度でのスピン波の振動数である。$T=0$ では ω_0 以外の項は0となる。振動数スペクトルの温度変化をスケッチすれば図のようであろう。この3つは連続的に移行するわけだが，$T=0$ および ∞ では doublet は消失する筈である。



密度波を論ずるのにAとして n_k をとれば，(B) が hydrodynamic regime となり振動数 Δ_1 は音波 ck を与える。ただしこの近似では等温的音波である。collisionless regime は，(6) 式に $\lambda_1(z)=\Delta_2^{\ 2}/z+\lambda_2(z)$ を代入し，$|\lambda_2|$ が小さい極限でそれを解くことによって得られる。結果は

(C) $|\lambda_2| \ll \Omega_2 \equiv \sqrt{\Delta_1^{\ 2}+\Delta_2^{\ 2}}$

$$z \cong \pm i\Omega_2 - \frac{\lambda_2}{2}\left[1-\left(\frac{\Delta_1}{\Omega_2}\right)^2\right], \qquad (13)$$

この振動数 Ω_2 は西山，Puff，Zwanzig等[8)]のと一致するが，しかし，Ω_2 は (C) の極限における振動数であって，実際には補正が必要である。補正項は振

動数を小さくし，望ましい傾向をもつ。

臨界気体（や液体 He I ）では T_c (or T_λ) に近ずくとき，音波の吸収 Re $\lambda_1(i\triangle_1)/2c$ が異常に大きくなることが知られている。これは $\triangle_2{}^2$ が異常に大きくなることに起因し，従って T_c (or T_λ) の近傍では適当な波数領域に対して条件 (C) が満される可能性が強い。

波数 k を大きくしてゆけば hydrodynamic modes はどう変貌するか，新しい振動的なモードも現われるのではないか，という問題は大変興味深い問題であって，rarified gases ($k \gg 1/\ell$) では既にいろいろと調べられている。[9)] ここで論じた問題も同種の問題であるが，相転移に関連している点で別の面白さが加わる。現象は多彩で新しいモードもでてくると期待されるが，かなりデリケートであって，数値的に精密な理論と中性子領域での精密な実験が必要である。

(1) Riste, J. Phys. Soc. Japan 17, Suppl. B-III (1962) 60.

(2) Brout, Phys. Letters 24A (1967) 117.

(3) Pines, in "Many-Body Theory" -1965 Tokyo Summer Lectures.

(4) Chen et al, Phys. Letters 16 (1966) 839.

(5) Mori, Prog. Theor. Phys. 34 (1965) 399.

(6) Mori, Symposium on Inelastic Scattering (Brookhaven, 1965) BNL 940 (C-45) p.49

(7) Mori, in "Many-Body Theory" -1965 Tokyo Summer Lectures.

(8) Nishiyama, 物性研究 8 (1967). no.4, D78.
Puff, Phys. Rev. 137 (1965) A406.
Zwanzig, Phys. Rev. 156 (1967) 156.

(9) Sirovichi, Phys. Fluids 6 (1963) 10.